



Olympiades de Mathématiques 2021

COMPOSITION UNIQUE DE MATHÉMATIQUES

07 NOVEMBRE 2021

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 HEURES

CALCULATRICE NON PROGRAMMABLE AUTORISÉE

LES EXERCICES SONT INDÉPENDANTS.

Attention Attention !!

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Exercice 1

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r < 0$, montrer que $u_1 = \frac{u_0 + u_2}{2}$
2. On suppose que la somme des trois premiers termes de la suite (u_n) vaut 81 et que le produit de ses trois premiers termes vaut 18360. Montrer que $3u_1 = 81$ et que $u_1^3 - r^2 u_1 = 18360$
3. En déduire r , u_1 et l'expression de u_n pour tout entier naturel n
4. Calculer $G(x) = \int \frac{e^{x/2} \operatorname{ch}(\frac{x}{2})}{\operatorname{ch}(x)} dx$ (Indication: poser $u = e^x$)
5. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$
6. Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^n}{1+x} dx$; Déterminer par encadrement la limite de cette suite.
7. Soient $a \in]0,1[$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans lui-même, de classe C^1 , telle que, pour tout réel x , $f(f(x)) = ax + b$.

Montrer que, pour tout réel x , $f(ax + b) = af(x) + b$. En déduire que, pour réel x , $f'(ax + b) = f'(x)$.

8. Calculer $F(t) = \int \frac{1}{\sin(t)} dt$

9. Calculer la limite de la suite $V_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!} e^{-n}$ [Rappel : $n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$ lorsque n tend vers $+\infty$]
10. Calculer la limite suivante $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Exercice 2

Soit f une fonction numérique définie et continue sur $[0,1]$.

- Montrer que les conditions suivantes définissent une unique fonction F continue et dérivable sur $[0,1]$: $F' = f$ et $\int_0^1 F(t)dt = 0$
- Exprimer F à l'aide de la fonction G définie par $G(x) = \int_0^x f(t)dt$
- Montrer que les conditions suivantes définissent une unique suite de polynômes (B_n) par : $B_0 = 1$, $B_{n+1}' = B_n$ et $\int_0^1 B_{n+1}(t)dt = 0$ pour tout $n \geq 0$
- Préciser le degré de B_n et son terme de plus haut degré ; Expliciter les polynômes B_1, B_2, B_3 et B_4 .
- Comparer, pour tout entier $n \geq 2$: $B_n(0)$ et $B_n(1)$
- On définit la suite de polynômes C_n en posant pour tout entier naturel n :
 $C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$. Comparer les suites (B_n) et (C_n)
 Que peut-on en déduire pour les graphes de B_n et pour les valeurs de $B_n(0)$, $B_n(1/2)$
 $B_n(1)$ lorsque n est impair supérieur ou égal à 3 ?
- Montrer que les polynômes B_{2p+1} ne s'annulent pas sur $]0,1/2[$.

Exercice 3

- Le président national de la structure **ECOSTATS** constate que chaque année, sept étudiants n'ayant pas réussi au concours à la session précédente reviennent se former et que les nouveaux apprenants représentent 93% de l'effectif de la session précédente. L'on note U_n l'effectif des apprenants à la n ème session ; par ailleurs l'effectif obtenu suite à la création de la structure (première session) est de 16 apprenants.
 - Écrire U_{n+1} en fonction de U_n . En déduire la nature de la suite (U_n)
 - Déterminer le réel c tel que la suite V_n définie par $V_n = U_n - c$ soit géométrique de raison donnée par votre connaissance de la nature de (U_n) . *Votre intuition pourrait vous être très utile !!!*
 - Déduire une expression de U_n en fonction de n
 - Que peut-on dire de l'effectif des apprenants de la structure à long terme ?
- On note C^* l'ensemble des nombres complexes non nuls et on considère l'application :

$$F: \begin{matrix} C^* \rightarrow C \\ z \rightarrow -\ln|z| \end{matrix}$$

1. Dans chacun des cas suivants déterminer l'ensemble des nombres complexes vérifiant l'équation :

 $F(z)=0$

 $F(z)=z$

 $F(z)=\bar{z}$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z

2. Soit G l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z'=F(z)$. On note C_R le cercle de centre O et de rayon R .

 Pour tout point de C_R d'affixe z , donner une écriture simplifiée de $F(z)$

 En déduire $G(C_R)$

 Pour quelle(s) valeur(s) de R a-t-on $G(C_R)=C_R$?

Problème

PARTIE A :

1. Montrer que pour tout réel $a>0$, les fonctions de la variable réelle t suivantes admettent des limites finies que l'on calculera lorsque t tend vers a :

$$\varphi(t)=\frac{t-a}{a\ln t-t\ln a} \quad \text{et} \quad \rho(t)=\frac{(t\ln t-a\ln a)(a\ln t-t\ln a)^2}{2(t-a)(t-a-a\ln \frac{t}{a})}$$

2. Ces limites dépendent de a . On les appelle $x(a)$ et $y(a)$. Soit M le point qui dans un repère orthonormé a pour coordonnées $x(a)$ et $y(a)$. Déterminer l'ensemble des points M lorsque a varie.

PARTIE B :

On considère la fonction définie par l'équation $y=\frac{2x-1}{x^3}e^{\left(\frac{x-1}{x}\right)}$ et C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1. Etudier les variations de y .

2. Montrer qu'il existe une fonction homographique $f(x)$ satisfaisant à $\int y dx = k + e^{\left(\frac{x-1}{x}\right)} f(x)$.

3. Construire C .

4. Sur C on considère les points A, B, O et P dont les points d'abscisses respectives $0, \frac{1}{2}, 1$ et $\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$.

Les parallèles à Oy issues de ces points, l'axe Ox et C déterminent trois domaines dont les aires sont respectivement A_1, A_2 , et A_3 . Calculer ces trois aires ; Dire si A_3 admet une limite quand α tend vers $+\infty$.